

24/03 Sunday April 2022

Усл-а 2го пор-ка аппр-ции методов Р-к

$$\sum_{i=1}^S b_i = 1,$$

$$\sum_{i=1}^S b_i C_i = \frac{1}{2},$$

$$\sum_{i=1}^S b_i C_i^2 = \frac{1}{3},$$

$$\sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^S b_i a_{ij} C_j = \frac{1}{6}$$

$$C_i = a_{i1} + \dots + a_{iS}, \quad i = \overline{1, S}$$

Вообще говоря, эта с-ма в ряде случаев при различн. S и требованиях на коэфф-ты табл. Бутчера, может не иметь реш-я. в частн. случаи.

① 1ые 2 усл-а — это усл-а 2го пор-ка аппр-ции

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^S b_i = 1, \\ \sum_{i=1}^S b_i C_i = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad C_i = \sum_{j=1}^S a_{ij}, \quad i = \overline{1, S}$$

Попробуем построить двухэтапн. явный метод.

Табл. Бутчера:

$$S=2$$

C_1	a_{11}	a_{12}
C_2	a_{21}	a_{22}
	b_1	b_2

Явному методу соств. следующ. жет-я
 $a_{ij}: a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0, \quad (*)$
 $a_{21} \neq 0.$

В общем виде при $S=2$ усл-я выглядят след образом: $\begin{cases} b_1 + b_2 = 1, \\ b_1(a_{11} + a_{12}) + b_2(a_{21} + a_{22}) = \frac{1}{2}, \end{cases}$

или, с учетом требований явности $(*) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} b_1 + b_2 = 1, \\ b_2 a_{21} = \frac{1}{2} \end{cases}$ — однопараметрич. семейство

$\begin{cases} b_1 = 1 - b_2, \\ a_{21} = 1/(2b_2) \end{cases} \Rightarrow$ Таблица:

0	0	0
$\frac{1}{2b_2}$	$\frac{1}{2b_2}$	0
	$1 - b_2$	b_2

В итоге получаем метод:

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = (1 - b_2)f(y_1) + b_2 f(y_2), \\ y_1 = u_n, \quad y_2 = u_n + \tau \cdot \frac{f(y_1)}{2b_2} \end{cases}$$

Его можно записать в одну стро-

ку: $\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = (1 - b_2)f(u_n) + b_2 f\left(u_n + \frac{\tau f(u_n)}{2b_2}\right)$

— знакомое по этому курсу однопараметрич. семейство 2-го пер-ка

② Диагонально неявный двухшагов. метод 2-го пер-ка

Табл. Бунтчера: // на след стр //

C_1	a_{11}	$0 (a_{12})$
C_2	a_{21}	a_{22}
	$1-b_2$	b_2

Усп-а 2го пор-ка:
$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 1, \\ b_1(a_{11} + 0) + b_2(a_{21} + a_{22}) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Например, при $a_{11} = a_{22}$ (1 из возможных вариантов):
$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 1, \\ b_1 a_{11} + b_2 a_{21} + b_2 a_{22} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 1 - b_2, \\ a_{11} + b_2 a_{21} = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ — трехпараметрич. метод}$$

③ Попробуем построить явный двухпараметрич. метод 3го пор-ка: $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$,
 $a_{21} \neq 0$

Усп-а:
$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 1, \\ b_1(a_{11} + a_{12}) + b_2(a_{21} + a_{22}) = \frac{1}{2}, \\ b_1(a_{11} + a_{12})^2 + b_2(a_{21} + a_{22})^2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Послед. усп-е имеет вид: $b_1 a_{11}^0 (a_{11} + a_{12}) + b_1 a_{12}^0 (a_{21} + a_{22}) + b_2 a_{21}^0 (a_{11} + a_{12}) + b_2 a_{22}^0 (a_{21} + a_{22}) = \frac{1}{6}$, т.е. последнее соотношение превращ-ся (в явного метода) в $0 = \frac{1}{6}$ (1?)

т.е. явного шумал. метода зго пор-ка ТЭ.

Число усл-й в с-ме ур-ний д/нахождения коэфф-ов в табл. Фурьера, вообще говоря, оч. велико. Как мы видели, д/зго пор-ка этих ур-ний — Н.

Д/достижения Нго пор-ка нужно добавить еще Н: $\sum_{i=1}^S b_i c_i^3 = \frac{1}{H}$, $\sum_{i,j=1}^S b_i c_i a_{ij} c_j = \frac{1}{8}$, $\sum_{i,j=1}^S b_i a_{ij} c_j^2 = \frac{1}{12}$, $\sum_{i,j,k=1}^S b_i a_{ij} a_{jk} c_k = \frac{1}{24}$ (без док-ва).
Установлено, что и p -пор-к атрибуции, то (без док-ва)

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
число ур-ний в с-ме д/коэфф-ов	1	2	Н	8	17	37	85	200	486	1205

Доказано большее кол-во Т о разра-шности этих с-м. Далее некоторые при-меры (без док-ва):

Т₁ ТЭ явного 5-этапного метода Р-К пор-ка $p > s$ (р-порядок)
Т₂ При $s \geq 5$ ТЭ явного 5-этапн. метода пор-ка $p = s$

3 При $\forall S \in \mathbb{N}$! явный метод пор-ка
 $p=2S$

4 А/данного $p \in \mathbb{N}$ явн. метод пор-ка p
с S этапами, if: $S = \begin{cases} (3p^2 - 10p + 24)/8, & p - \text{четн.} \\ (3p^2 - 11p + 9)/8, & p - \text{нечетн.} \end{cases}$

И многие другие ∇ на эту тему...

П.Н. Сх-ты методов Р-К

* общий вид методов Р-К:

$$\begin{cases} \frac{U_{n+1} - U_n}{\tau} = \sum_{i=1}^S b_i f(y_i), \\ y_i = U_n + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j), \quad i = \overline{1, S} \end{cases}$$

Будем предполагать, что погреш-ть метода
 ψ_n найдена и известен ее порядок

Кроме того предполагаем, что $f(u): |f'_u(u)| \leq M'$ — окр.

Вспомним, что д/сх-ты метода к реш-ю
дифф-й задачи нужно, чтобы погреш-ть
метода $\varepsilon_n = U_n - u(t_n)$ стремилась до к 0
при $\tau \rightarrow 0$, где U_n — сеточ. ф-ция, $u(t_n)$ — точ-
ное реш-е ф.т. сетки $t_n = \tau n$, $n = 0, 1, 2, \dots$,
 τ — шаг по времени.

Выразим $u_n = z_n + u(t_n)$ и подставим
в разностный метод: $\frac{z_{n+1} - z_n}{\tau} + \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\tau} =$

$$= \sum_{i=1}^s b_i f(y_i(u(t_n) + z_n))$$

Вместо лев. и прав. части берем
 $\sum_{i=1}^s b_i f(y_i(u(t_n)))$: $\frac{z_{n+1} - z_n}{\tau} + \left[\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\tau} - \sum_{i=1}^s b_i f(y_i(u(t_n))) \right] = \sum_{i=1}^s b_i [f(y_i(u(t_n) + z_n)) - f(y_i(u(t_n)))]$

$\{ \dots \} = -\psi_n$ — погрешность аппр-ции (см. Л.3
пред. лекции). Тем самым: $\frac{z_{n+1} - z_n}{\tau} =$
 $= \sum_{i=1}^s b_i [f(y_i(u(t_n) + z_n)) - f(y_i(u(t_n)))] + \psi_n$ (*)

Преобразуем величину Δ_i с помощью
ф-лы ЛAGRANЖА: $\Delta_i = f(y_i(u(t_n) + z_n)) - f(y_i(u(t_n))) = f'_u y'_{i,u} |_{u=u(t_n) + \theta z_n} \cdot z_n, 0 \leq \theta \leq 1$
Мы предположили, что $|f'_u| \leq M$.

Оценим $|y'_{i,u}|$: $y_i(u) = u + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j(u)) \Rightarrow$
 $\Rightarrow y'_{i,u} = 1 + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} f'_u y'_{j,u}$ // Далее по удобству
] y_{i0} : $|y'_{i0,u}| = \max_{1 \leq j \leq s} |y'_{j,u}| \Rightarrow$
 $\Rightarrow |y'_{i0,u}| \leq 1 + \tau \sum_{j=1}^s |a_{ij}| M \cdot |y'_{j,u}| \leq 1 +$

+ TASM. $|y'_{i,u}|$, где $a = \max_{i,j} |a_{ij}|$. В итоге получаем нер-во $(1 - aTSM)|y'_{i,u}| \leq 1$ //end//

Будем выбирать τ : $1 - aTSM \geq \frac{1}{q} > 0$, $q > 1$. Тогда получим $|y'_{i,u}| \leq q$, $i = \overline{1, S}$ при условии на шаг $\tau \leq \frac{q-1}{aTSM}$ — ограничение на шаг τ !
 → переобозначим

Теперь есть возможность оценить $|\Delta_i|$

$$|\Delta_i| \leq |f'_i| |y'_{i,u}| |\bar{z}_n| \leq Mq |\bar{z}_n|.$$

Перепишем (*) в виде: $\bar{z}_{n+1} = \bar{z}_n + \tau \sum_{i=1}^S b_i \Delta_i + \psi_n \cdot \tau$

Введем $\|\psi\| = \max_n |\psi_n|$, тогда будет верна нер-во: $|\bar{z}_{n+1}| \leq |\bar{z}_n| + \tau \sum_{i=1}^S b_i |\Delta_i| + \tau \|\psi_n\| \leq |\bar{z}_n| + \tau |\Delta_i| + \tau \|\psi\|$

$$\leq |\bar{z}_n| + \tau Mq |\bar{z}_n| + \tau \|\psi\|$$

Скончателно имеем: $|\bar{z}_{n+1}| \leq |\bar{z}_n| (1 + \tau Mq) + \tau \|\psi\|$

Вспомним, что нач. усл. в зад. Коши задается точкой: $u_0 = u(t=0)$, т.е. $\bar{z}_0 = 0$

Обозначим: $1 + \tau Mq \leq e^{Mq\tau} = C > 1 \Rightarrow$

$$|\bar{z}_{n+1}| \leq |\bar{z}_n| C + \tau \|\psi\| \leq (|\bar{z}_{n-1}| C + \tau \|\psi\|) C + \tau \|\psi\| \leq \dots \leq (1 + C + C^2 + \dots + C^n) \tau \|\psi\| \leq$$

$\leq \|C^n\| \|\psi\| = \tau^n = n\tau$ — отрезок, на δ может

быть помещен $= \tau C^n \|\psi\| = \tau e^{M_0 n \tau} \cdot \|\psi\| \leq$

$\leq \tau e^{M_0 \tau} \|\psi\| \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0 \Rightarrow$ метод сх-сы, if $\boxed{\|\psi\| \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0}$

Сх-та доказана.